

Franc Rozman
fr.rozman@gmail.com

Temelji Maxwellovih enačb

Povzetek:

Maxwellove enačbe so težko razumljive celo poznavalcem fizikalnega ali elektrotehničnega področja. Pogosto jim zgolj zaupamo. Enačbam verjamemo, ne vemo pa na osnovi česa. To pa nam lahko zamegli območje veljavnosti enačb. Na zaupanju temelječe Maxwellove enačbe dobijo celo nekatere značilnosti dogme. V tem članku so podani temelji Maxwellovih enačb na primerih EM valovanja. Enostavni primeri, namesto zapletenih enačb, temelje Maxwellovih enačb lahko približajo širšemu krogu bralcev.

Uvod

Svetloba je elektromagnetno (EM) valovanje, kamor spadajo tudi radijski valovi, rentgenski žarki, itn. Maxwell je širjenje EM vala opisal v matematični obliki.

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho_e . \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 . \\ \text{Rot } \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \mathbf{j}_e . \\ \text{Rot } \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 .\end{aligned}$$

Slika 1

Enačbe vključujejo v vsakdanjem življenju redko uporabljene matematične operatorje, zato so v nadaljevanju predstavljene v poenostavljeni obliki.

Da pa se enačb ne prestrašimo, lahko povemo, da enačbe predstavljajo nekaj vsakdanjega. Voda, ki teče preko brzic, ima glede na naklon terena različne hitrosti. Podobno kot voda preko brzic se v EM valu medsebojno pretakata električno in magnetno polje.

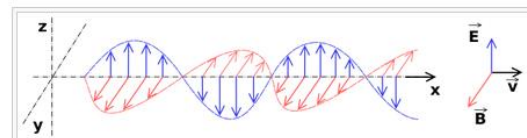
Kjer se v prostoru pojavijo razgibane jakosti električnega polja (E), ta različna električna polja med posameznimi točkami v prostoru lahko razumemo kot naklone električnega polja v prostoru, po katerih se pretaka magnetno polje. Različni nakloni električnega polja povzročijo različne časovne spremembe magnetnega polja, kar na primer opišemo v obliki.

$$\text{Rot } \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 .$$

Podobno različne strmine brzic povzročijo različno hiter tek vode po brzicah.

Rot E opisuje, kako se v prostoru od točke do točke spreminja električno polje, $\delta B/\delta t$ pa kako hitro se posledično spreminja magnetno polje.

EM val je običajno prikazan z diagramom, kot ga kaže Slika 2.



Slika 2

Maxwell je enačbe zapisal pred odkritjem teorije relativnosti, zato vektorska oblika enačb ne vsebuje zakonitosti relativnosti. Zapisane so v Galilejevem koordinatnem sistemu. V vektorski obliki Maxwellovih enačb torej ne poznamo pojmov iz relativnosti, kot so skrčitev prostora (x') ali dilatacija časa (t').

V vektorski obliki Maxwellovih enačb z $d\mathbf{D}/dt$ in $d\mathbf{B}/dt$ opisujemo kako hitro se v opazovani točki spreminja električno in magnetno polje. Prostorsko razporeditev električnega in magnetnega polja, to je obliko krivulje na Sliki 2 in valovno dolžino EM vala pa opisujeta **Rot(E)** in **Rot(H)**.

Poenostavitev enačb na primeru

Maxwellove enačbe lahko poenostavim tako, da se omejim zgolj na EM val, ki potuje v smeri x, kot to kaže Slika 2. V tem primeru nas zanimajo predvsem

krajevne in časovne razmere na x osi koordinatnega sistema.

Četrta Maxwellova enačba se z usmeritvijo EM vala v smeri x koordinate poenostavi v obliko:

$$dE/dx + dB/dt = 0$$

Rot funkcija se poenostavi v funkcijo odvoda dE/dx . Odvod električnega polja po prostorski koordinati x predstavlja strmino krivulje električnega polja v opazovani točki. Celotna funkcija dE/dx na celotni x osi pa opiše geometrijsko obliko EM vala, s tem pa tudi valovno dolžino EM vala. Časovne razmere EM vala (frekvenco) pa opisuje funkcija dB/dt .

Vrednost člena dE/dx vzdolž valovne dolžine (Slika 2) v Galilejevem koordinatnem sistemu ni odvisna od hitrosti opazovalca. V členu dE/dx ni nobene spremenljivke ali matematične operacije, ki bi kazala, da hitrost opazovalca vpliva na obliko in valovno dolžino EM vala.

Drugače je s členom dB/dt . Hitrost opazovalca svetlobnega vala skladno z Dopplerjevim učinkom vpliva na frekvenco EM vala. Frekvenco EM vala pa je določena s členom dB/dt .

Za lažjo predstavo si člena dE/dx in dB/dt lahko ilustriram na še bolj predstavljenem primeru. Člen dE/dx predstavlja geometrijsko obliko neke krivulje, podobno kot jo ima brazda na gramofonski plošči. Hitrost vrtenja gramofonske plošče ne vpliva na geometrijsko obliko brazde. Ta je takšna kot je in ni odvisna od hitrosti plošče. Podobno hitrost opazovalca ne vpliva na geometrijsko obliko (dE/dx) EM vala.

Različne hitrosti vrtenja gramofonske plošče povzročajo različne frekvence gramofonske igle, podobno kot različne hitrosti opazovalca svetlobe povzročajo različne vrednosti člena dB/dt s tem pa frekvence svetlobe.

V Galilejevem koordinatnem sistemu vektorske oblike Maxwellovih enačb posledično določajo, da se ob konstantni valovni dolžini s hitrostjo opazovalca spreminja frekvenca svetlobe, kar po enačbi $c=f\cdot\lambda$ pomeni, da je hitrost svetlobe na ponoru v vektorski obliki Maxwellovih enačb odvisna od hitrosti opazovalca.

Po enačbi $dE/dx + dB/dt = 0$ se zaradi vpliva hitrosti opazovalca v opazovani točki torej spreminja dB/dt , ne spreminja pa se dE/dx . Ta pogoj določa veljavnost vektorska oblika Maxwellovih enačb. Pogoj je lahko izpolnjen le pri eni sami hitrosti opazovalca, to je v primeru, kadar se vir svetlobe in opazovalec nahajata v istem sistemu opazovanja.

Maxwellove enačbe v primeru gibajočega vira ali ponora svetlobe rabijo nadgradnjo, ki bo določala, kako hitrost vira ali ponora vpliva na EM polje EM vala.

Tenzorska oblika Maxwellovih enačb

V nadaljevanju vektorsko obliko Maxwellovih enačb nadgradim z zakonitostmi teorije relativnosti, na osnovi česar dobimo tenzorsko obliko Maxwellovih enačb. V krajevne in časovne parametre vektorske oblike Maxwellovih enačb vpeljemo zakonitosti relativnosti, kar je opisal A. Einstein v članku ON THE ELECTRODYNAMICS OF MOVING BODIES [3].

To nadgradnjo omogoča prostor Minkowskega. V tem zapisu prostor Minkowskega ni uporabljen, ker le-ta temelji na predpostavki (*izhodišču*), da je hitrost svetlobe v vseh razmerah enaka. Vektorska oblika Maxwellovih enačb ustvarja dvom o v vseh razmerah enaki hitrosti svetlobe, zato je prostor Minkowskega je lahko celo brezpredmeten, če se izkaže, da hitrost svetlobe ni enaka v vseh razmerah.

Nadaljnje razmišljanje posledično privzema le temeljne zakonitosti teorije relativnosti o skrčilih prostora (x') in dilataciji časa (t'). Na osnovi tega je izpeljana vpadna hitrost svetlobe na gibajočem ponoru.

Člen enačbe dE/dx dopolnimo tako, da mu dodamo korekcijski faktor, ki določa v kakšni meri hitrost opazovalca vpliva na relativistični skrček oziroma raztezok prostora.

Da bi bil naš pogled čim bolj razumljiv, naredim še eno poenostavitev. Po teoriji relativnosti se prostor med dvema točkama v primeru približevanja krči po enačbi:

$$x' = \gamma(x-vt)$$

V primeru oddaljevanja med njima pa se širi po enačbi

$$x' = \gamma(x+vt)$$

Enačbi poenostavim tako, da opazujem le majhne hitrosti opazovalca, na primer hitrosti, ki ne presegajo 1 km/s, kjer je vpliv hitrosti na γ 10^{-10} ali manjši.

Vpliv učinka hitrosti na γ pri teh majhnih hitrostih je za mnogo velikostnih razredov manjši od učinka ostalih členov. Pri teh majhnih hitrostih faktor γ zato lahko zaokrožimo na 1 in dobimo poenostavljeni obliki enačb vpliva hitrosti opazovalca na razdaljo.

$$x' = x-vt \quad \text{oziroma} \quad x' = x+vt$$

Osnove relativnosti

Osnovne značilnosti relativnosti si oglejmo na primeru dveh enakih palic, pri katerih je vsaka (v primeru mirovanja) doga natanko en meter.



Slika 3A

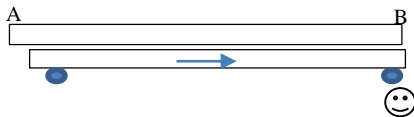
Gornja palica na Sliki 3A miruje, spodnja pa se skupaj z opazovalcem, lociranim na levi strani palice, giblje v desno. Dolžino gornje palice opazovalec opazuje v trenutku, ko sta palici na levi strani poravnani.

Za opazovalca je spodnja palica še vedno dolga 1 m, zgornja palica pa se opazovalcu zaradi približevanja točke B skrajša na razdaljo $x' = x - vt$.

Razdalja x je v našem primeru 1 m, t pa je čas, v katerem svetloba preleti razdaljo 1 m, torej $t = v/c$. Opazovalec mirujočo palico vidi dolgo

$$x' = 1 - v/c$$

Drug primer kaže Slika 3B.



Slika 3B

V tem primeru sta v trenutku opazovanja palici poravnani na desni strani. Tudi opazovalec se nahaja na desni strani svoje palice. Točka A na gornjem metru se od opazovalca oddaljuje, zato bo opazovalec zaznal večjo dolžino zgornje palice od enega metra, to je dolžino $x' = 1 + v/c$

V tretjem primeru na Sliki 3C se opazovalec nahaja na sredini spodnje palice in potuje z njo.



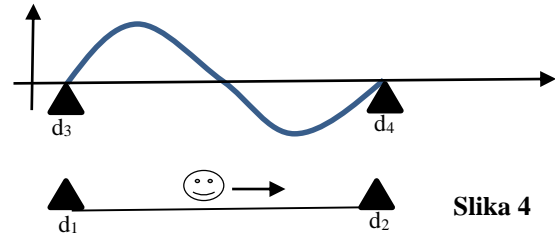
Slika 3C

Razdalja opazovalca do točke A ali B je pol metra, zato opazovalec zazna razdaljo do točke B ($1/2 - v/2c$), do točke A pa ($1/2 + v/2c$).

Vsota obeh razdalj je $1/2 - v/2c + 1/2 + v/2c = 1$, kar pokaže, da gibajoči opazovalec vidi enako dolžino obeh palic, ne glede na hitrost opazovalca.

Valovna dolžina

V naslednjem primeru imam namesto dveh palic valovno dolžino svetlobe, ki jo v enem primeru opazuje mirujoč opazovalec, v drugem primeru pa gibajoč opazovalec, kot to prikazuje Slika 4.



Slika 4

Na mirujočo podlago namestim dva senzorja EM polja na razdalji ene valovne dolžine svetlobnega vala, ki jih na Sliki 4 prikazujeta senzorja d_3 in d_4 . Podobno gibajočemu opazovalcu na enaki medsebojni razdalji namestim dva enaka senzorja d_1 in d_2 . Senzorja sta med seboj togo vezana, tako da ne moreta spreminjati medsebojne razdalje, se pa lahko gibljeta skupaj z opazovalcem.

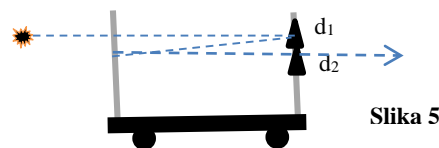
Kadar se senzorja d_1 in d_3 nahajata v isti točki, v isti točki merita isto EM polje. Podobno kadar se senzorja d_2 in d_4 nahajata v isti točki, tudi senzorja d_2 in d_4 merita isto EM polje v isti točki.

Opazovalca namestim na sredino med detektorja d_1 in d_2 . Posledično sta točki d_1 in d_3 po analogiji izračuna dolžine palic poravnani hkrati z poravnavo točk d_2 in d_4 . Gibajoči opazovalec na Sliki 4 zazna enako valovno dolžino, kot mirujoči opazovalec $\lambda' = \lambda$, ne glede na hitrost gibanja opazovalca.

Isti rezultat dobimo tudi po drugi metodi; po enačbi $x' = x - v \cdot \Delta t$. Po teoriji relativnosti opazovalec nameščen v sredini med točkama A in B v točkah A in B zaznava enak čas, ker je od obeh točk enako oddaljen. Posledično je $\Delta t = 0$ in $x' = x$.

Primer enega opazovalca

Še manj tveganja za morebitne napake pri sklepanju dosežemo, če točki A in B oziroma detektorja d_1 in d_2 združimo v isto točko. Detektorja na Sliki 4 lahko združimo tako, kot to kaže Slika 5.



Slika 5

V vlogi merilnika imamo dve polpropustni ogledali, nameščeni na gibajoči voziček. EM val iz mirujočega vira potuje do detektorja d_1 , se tam odbije nazaj do prvega polpropustnega ogledala, kjer se še enkrat odbije in potuje do detektorja d_2 .

Detektorja d_1 in d_2 sta v isti točki in v tej točki je tudi opazovalec. Opazovalec hkrati opazuje odboj žarka ob detektorju d_1 in prehod žarka ob detektorju d_2 .

Ker je opazovalec obeh EM valov v isti točki odpade zadnji člen v enačbi $x' = x - v \cdot \Delta t$. V primeru majhnih hitrosti, kjer je γ za mnogo razredov manjši od

izmerjenega Dopplerjevega učinka, je tudi γ zanemarljiv. Povzamem lahko, da je $\lambda' = \lambda$, ne glede na hitrost gibanja merilnega vozička in opazovalca na njem.

Hitrost svetlobe

Valovna dolžina svetlobe se ne spremeni niti v primeru vektorske oblike Maxwellovih enačb niti v primeru nadgradnje Maxwellovih enačb z zakonitostmi relativnosti. Dopplerjev učinek vpliva torej na frekvenco svetlobe, ne pa na valovno dolžino svetlobe.

Spreminjaje frekvence svetlobe s hitrostjo opazovalca ali vira svetlobe, ob konstantni valovni dolžini svetlobe, pa po enačbi $c=f\lambda$ pomeni, da je hitrost svetlobe na ponoru odvisna od hitrosti vira glede na opazovalca.

Fizika ima možnost merjenja hitrosti svetlobe. Merimo lahko valovno dolžino svetlobe pri različnih hitrostih vira svetlobe.

Meritev vpliva hitrosti med virom in opazovalcem na valovno dolžino svetlobe še ni opravljena.

Za potrditev teze o vplivu hitrosti vira svetlobe na valovno dolžino svetlobe se lahko uporabi meritev, ki je bila opravljena leta 2007 in je opisana v članku [1] »S. REINHARDT; *Test of relativistic time dilation with fast optical atomic clocks at different velocities*«.

V cevi pospeševalnika potuje litijev ion. Ion na osnovi fluorescence svetlobo izsevava enkrat v smeri gibanja Li iona, drugič v nasprotni smeri.

Z merilnikom valovne dolžine (spektralnim analizatorjem) merimo valovno dolžino obeh žarkov svetlobe iz Li iona, tistega ki ga Li ion seva v smeri gibanja in tistega, ki ga Li ion seva v nasprotni smeri.

Avtorji že opravljene meritve so meritev valovne dolžine mogoče opustili ravno zaradi pričakovanih drugačnih rezultatov.

Zaključek

EM valovanje karakterizirajo prostorske in časovne lastnosti polj. Krajevne lastnosti EM vala opisujeta funkciji $\text{Rot}(E)$ in $\text{Rot}(H)$ Maxwellovih enačb. V članku je podana teza, da se $\text{Rot}(E)$ in $\text{Rot}(H)$, s tem pa valovna dolžina svetlobe na ponoru, ne spreminja s hitrostjo opazovalca svetlobe. Hitrost opazovalca se odraža predvsem v zaznani spremembi frekvence svetlobe, kar pa ni skladno z v vseh razmerah enako hitrostjo svetlobe.

Opisana teza, potrjena z meritvijo, bo odprla novo poglavje v razvoju fizike. Mogoče bo pokazala, da v fiziki niso potrebni le lepotni popravki, da fizika potrebuje celovito prenovu.

Literatura

[1] S. REINHARDT; Test of relativistic time dilation with fast optical atomic clocks at different velocities

[2] Delone, Makarova, Yakunina: "Evidence for Moving Features in the Corona from Emission Line Profiles Observed During Eclipses", Moskva, 1987.

[3] A. Einstein, ON THE ELECTRODYNAMICS OF MOVING BODIES
http://hermes.ffn.ub.es/luisnavarro/nuevo_maletin/Einstei_n_1905_relativity.pdf